

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.К. АММОСОВА
Якутское отделение Регионального научно-образовательного математического центра
«Дальневосточный центр математических исследований»

**VIII Всероссийская студенческая олимпиада (ВСО) по математике с
международным участием в 2022-2023 учебном году**

Составители:
Верховцев Семен Дмитриевич
Федотов Егор Дмитриевич
Шарин Евгений Федорович

Якутск 2023г.

VIII Всероссийская олимпиада студентов образовательных организаций высшего образования (ВСО) в 2022-2023 году

1. Найдите предел

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} \left(\frac{17^n + 119^n}{2} \right)^{1/n}.$$

2. Найти 6 точек на плоскости, не лежащих на одной прямой, таких что расстояние между любыми двумя из них является целым числом.

3. Пусть $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, а также $a, b \in \mathbb{C}/\{0\}$ и $a \neq b$. Найдите $\det(A - B)$, если известно что

$$AB = aA + bB,$$

$$BA = bA + aB.$$

4. Вычислите интеграл

$$\int_{|z|=1} \frac{z^{n-1}}{2z^n + 1} dz, \quad n \in \mathbb{N}.$$

5. Пусть x, y - натуральные числа, $\{a_n\}$ - последовательность:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1 + 2y, \quad a_3 = 1 + 3x + 3y,$$

$$a_{n+3} = xa_n + ya_{n+1} + a_{n+2}, \quad \text{для } n \geq 1.$$

Докажите что для любого p -простого, $a_p - 1$ делится на p .

6. Пусть f - ограниченная функция, заданная на отрезке $[0, 2]$ и удовлетворяющая неравенству

$$f(t+h) \geq h(f(t)^2 + f(t)) + 1,$$

для любых $t, h \geq 0$, $t+h \leq 2$. Найдите $f(t)$.

7. Докажите, что существует бесконечно много пар (m, n) натуральных чисел m, n , таких что

$$\frac{n}{m} + \frac{m+1}{n}$$

является натуральным числом.

Решение задач

Решение задачи 1.

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} \left(\frac{17^n + 119^n}{2} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{17^n - 1 + 119^n - 1}{2} \right)^{\frac{1}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{17^n - 1}{2n} + \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{119^n - 1}{2n}} = e^{\ln \sqrt{17 \cdot 119}} = \sqrt{2023}$$

Критерии

- Несущественные арифметические ошибки - 5 баллов.
- Есть ошибки, но в целом верное решение - 4 балла.

Решение задачи 2.

Возьмем пять разных пифагоровых троек, соответствующих пяти разным прямоугольным треугольникам с общим катетом a :

$$\begin{aligned} a^2 + b_1^2 &= c_1^2, \\ a^2 + b_2^2 &= c_2^2, \\ a^2 + b_3^2 &= c_3^2, \\ a^2 + b_4^2 &= c_4^2, \\ a^2 + b_5^2 &= c_5^2. \end{aligned}$$

Этого всегда можно добиться, например, рассмотрев пять разных примитивных пифагоровых троек, а затем взять подобные им пифагоровы тройки с подходящими коэффициентами подобия.

Точки $(a, 0)$ и $(0, b_1), (0, b_2), (0, b_3), (0, b_4), (0, b_5)$ удовлетворяют условию, так как попарные расстояния между точками $(0, b_i)$ очевидно целые, а расстояния между $(a, 0)$ и $(0, b_i)$ также равны целым числам $\sqrt{a^2 + b_i^2} = c_i$.

Решение задачи 3.

Заметим, что система уравнений симметрична, относительно искомым матриц (A, B) . Для начала давайте возведем в квадрат одно из уравнений.

$$\begin{aligned} \underline{ABAB} &= A(bA + aB)B = bA^2B + aAB^2 = \\ &= bA(aA + bB) + a(aA + bB)B = abA^2 + b^2AB + a^2AB + abB^2 = \\ &= ab(A^2 + B^2) + (a^2 + b^2)AB \end{aligned}$$

$$ABAB = (aA + bB)^2 = a^2A^2 + b^2B^2 + abAB + abBA.$$

Далее воспользуемся симметрией относительно замены $A \leftrightarrow B$. Тогда получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} a^2A^2 + b^2B^2 + abAB + abBA &= ab(A^2 + B^2) + (a^2 + b^2)AB \\ a^2B^2 + b^2A^2 + abBA + abAB &= ab(A^2 + B^2) + (a^2 + b^2)BA. \end{aligned}$$

Просуммировав их мы получим

$$(a^2 + b^2)(A^2 + B^2) + 2ab(AB + BA) = 2ab(A^2 + B^2) + (a^2 + b^2)(AB + BA)$$

$$(a - b)^2(A^2 + B^2) = (a - b)^2(AB + BA).$$

В силу того, что $a \neq b$ получим, что $A^2 + B^2 = AB + BA$ или же $(A - B)^2 = 0$. Откуда следует, что $\det(A - B) = 0$.

Критерии

- Если пропущено обоснование существенного момента - 5 баллов.
- Есть существенные ошибки, но прослеживается логика решения - 3 балла.
- Если есть вычисление матриц вида ABA или BAB - 2 балла.
- Явное или неявное решение через обратную матрицу - 1 балл.

Решение задачи 4.

Заметим, что если $f(z) = 2z^n + 1$, тогда

$$\int_{|z|=1} \frac{z^{n-1}}{2z^n + 1} dz = \frac{1}{2n} \int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Пусть $f(z)$ имеет корень a порядка k . Тогда $f(z) = (z - a)^k g(z)$, $g(a) \neq 0$, откуда получаем, что

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - a} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Или же интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n - \text{количество корней } f(z) \text{ внутри кривой } |z| = 1.$$

Откуда получаем, что искомый интеграл равен πi .

Критерии

- Существенные ошибки в вычислении интеграла при верном ходе решения - 4 балла.

Решение задачи 5.

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что характеристический многочлен этой матрицы такой же как и у данной рекуррентной последовательности и равен $\lambda^3 - \lambda^2 - y\lambda - x$. Явно вычислим и покажем, что

$$\text{Tr}(A) = 1, \text{Tr}(A^2) = 1 + 2y, \text{Tr}(A^3) = 1 + 3x + 3y.$$

По теореме Гамильтона-Кэли мы получаем, что $A^3 = A^2 + yA + xE$. Или же

$$a_{n+3} = a_{n+2} + ya_{n+1} + xa_n = \text{Tr}(A^{n+3}) = \text{Tr}(A^{n+2}) + y\text{Tr}(A^{n+1}) + x\text{Tr}(A^n).$$

Откуда видим, что $a_n = \text{Tr}(A^n)$ для любого натурального n . Так как $\text{Tr}(A) = 1$, то следующая теорема завершает доказательство.

Теорема В.И. Арнольда о матричном аналоге малой теоремы Ферма¹, которую мы докажем, говорит о том что

$$\text{Tr}(A^p) \equiv \text{Tr}(A) \pmod{p}, \forall A \in M_{n \times n}(\mathbb{Z}).$$

Доказательство. Обобщая $\text{Tr}(XY) = \text{Tr}(YX)$ выходит что $\text{Tr}(X_1 \dots X_n) = \text{Tr}(X_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_n})$, для любой перестановки α_i . Тогда

$$\text{Tr}(X + Y)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \text{Tr}(X^k Y^{p-k}) \equiv \text{Tr}(X^p) + \text{Tr}(Y^p) \pmod{p}.$$

Аналогично будет и верна

$$\text{Tr}(X_1 + \dots + X_n)^p \equiv \text{Tr}(X_1^p) + \dots + \text{Tr}(X_n^p) \pmod{p}.$$

Разлагая матрицу по единичным матрицам E_{ij} , у которого единица на позиции i, j и нули на остальных, мы получим

$$\text{Tr}(X^p) = \text{Tr}\left(\sum_{i,j=1}^n x_{ij} E_{ij}\right)^p \equiv \text{Tr}\left(\sum_{i,j=1}^n x_{ij}^p E_{ij}^p\right) \equiv \sum_{i=1}^n x_{ii}^p \equiv \sum_{i=1}^n x_{ii} \equiv \text{Tr}(X) \pmod{p}.$$

Решение задачи 6.

Заметим, что $f(0) \geq 1$ при $t = h = 0$ и $f(1) \geq 3$ при $t = 0, h = 1$. Пусть $a_n = f(2 - 2^{-n})$, тогда

$$a_{n+1} = f(2 - 2^{-n} + 2^{-n-1}) \geq 2^{-n-1}(f(2 - 2^{-n})^2 + f(2 - 2^{-n})) + 1 = 2^{-n-1}(a_n^2 + a_n) + 1.$$

Мы получаем рекуррентное неравенство

$$a_{n+1} \geq 2^{-n-1}(a_n^2 + a_n) + 1, \quad a_0 = f(2 - 1) \geq 3,$$

где расписав несколько первых членов, можем придти к гипотезе, что $a_n \geq 2^{n+2} - 1$. Прямой подстановкой убеждаемся, что гипотеза верна.

Тогда выходит, что функция $f(x)$ неограниченна на отрезке $[0, 2]$ или же решений нет.

- Доказано, что функция не является ограниченной - 7б.

¹В. И. Арнольд. Динамика Ферма, арифметика матриц, конечная окружность и конечная плоскость Лобачевского// Функци. анализ и его прил., 2004, том 38, выпуск 1, 1-15. <https://doi.org/10.4213/faa92>

- Рассуждения о свойствах функции, которые ошибочны, либо не приводят к противоречию - нуль баллов.

(свойства, например $f(0) \geq 1$ и другие, не оцениваются ввиду того, что эти свойства не указывают на неограниченность функции).

Решение задачи 7.

Доказательство. Преобразуем уравнение

$$\frac{n}{m} + \frac{m+1}{n} = 3$$

к виду

$$n^2 - 3mn + m^2 + m = 0. \quad (1)$$

Если n является корнем уравнения (1) при фиксированном m , то таковым же является и $n' = 3m - n$, потому что по теореме Виета корни в сумме дают $n + n' = 3m$. Аналогично, если m является корнем уравнения при фиксированном n , то таковым же является $m' = 3n - 1 - m$.

Существование бесконечного количества решений теперь следует из того, что итерация указанных формул для m' и n' , начиная, к примеру, с $(1, 1)$, приводит к неограниченному, а потому бесконечному, множеству решений. В самом деле, переход $(n, m) \rightarrow (n', m)$ при $m \geq n$, а также переход $(n, m) \rightarrow (n, m')$ при $n \geq m$ приводят к "большим" решениям, так как, например, в первом переходе $n' > n$, поскольку $3m - n \geq 3n - n = 2n > n$, ч.т.д.

Описанный подход приводит к решениям $(n, m) = (1, 1), (2, 1), (2, 4), (10, 4), (10, 25), \dots$

Критерии

- Выписаны формулы Виета по одной переменной - 4 балла.